Jean-Paul Delahaye

Deux sculpteurs de mathématiques

Des machines « impriment » en trois dimensions des objets mathématiques. Deux artistes, George Hart et Bathsheba Grossman, utilisent ce dispositif pour faire des sculptures.

L'espace n'est pas un vide passif : ses propriétés imposent de fortes contraintes aux structures qui l'habitent.
Arthur Loeb (1923-2002)

Certaines personnes consacrent leur vie aux mathématiques et la beauté qu'elles y rencontrent est souvent la raison de leur choix. Cette beauté échappe au profane qui, face aux formules et aux raisonnements délicats, ne ressent rien et pense, au contraire, qu'il est bien ingrat de s'occuper de tels sujets.

Toutefois, lorsque le mathématicien traduit ses équations et démonstrations en images, l'idée du « mathématiquement beau » apparaît à tous : ainsi les pavages de l'art islamique et les fractales illustrent ces traductions esthétiques de l'univers mathématique qui séduisent tout le monde, même ceux qui ignorent leur mode de fabrication. Lorsque le mathématicien tire de son travail des objets tridimensionnels, l'effet est encore plus frappant : aussi de nombreux artistes ont eu l'idée de réaliser des sculptures mathématiques.

Le prototypage rapide

Les sculptures de George Hart et de Bathsheba Grossman sont parmi les plus extraordinaires. Ces deux Américains, artistes et mathématiciens, matérialisent les objets qu'ils imaginent avec une précision minutieuse qu'aucun artisan ou artiste traditionnel ne pourrait égaler. Un de leurs secrets est l'utilisation des techniques mises au point pour le prototypage rapide et la production d'objets industriels en petite série : maquettes de voitures, d'avions ou de pièces mécaniques complexes dont on souhaite obtenir une réalisation géométriquement très précise. Si chacun sait qu'aujourd'hui un programme informatique peut faire qu'une image s'imprime, on ignore souvent qu'un programme peut aussi sculpter une forme : la traduction directe d'idées abstraites en formes mathématiques tridimensionnelles est devenue possible en sculptant automatiquement des objets calculés par programme, et donc sans avoir à utiliser ni bois, ni bloc de marbre, ni glaise, ni plâtre.

L'opération de transformation du modèle mathématique stocké dans un fichier informatique en objet physique se fait le plus souvent en opérant un découpage numérique préalable de la forme de l'objet en fines tranches parallèles. Ces tranches calculées sont ensuite créées automatiquement et assemblées pour obtenir la pièce voulue. Le procédé SLS *(Selective laser sintering)* est l'une de ces techniques : le laser chauffe une poudre sans la mener jusqu'à la fusion, soudant ainsi les grains, comme lors de la cuisson d'une poterie. Puis on élimine les grains non soudés. Le chauffage, couche par couche, produit ainsi progressivement et automatiquement l'objet calculé par l'ordinateur.

La stéréolithographie est un procédé du même type que la SLS fonctionnant encore à l'aide d'un laser. Cette fois on utilise des résines liquides qui polymérisent sous l'action de la lumière ou de la chaleur. Comme précédemment, le laser solidifie couche par couche l'objet décrit par le modèle numérique. Quand il est terminé, le modèle est retiré de la cuve et le mélange non polymérisé est dissous. Souvent pour terminer, on le cuit pour le durcir. Il existe une multitude de variantes selon les besoins ; on introduit par exemple des poudres métalliques dans la résine. Le but n'est pas toujours la fabrication d'un objet, mais la confection d'un moule qui sera ensuite utilisé un grand nombre de fois pour la création d'objets identiques en série.

L'impression en trois dimensions possède l'avantage de réaliser des formes complexes qui seraient quelquefois impossibles à obtenir par un autre procédé. En revanche, le procédé est lent et cher s'il s'agit de fabriquer de grandes séries de copies d'un même objet d'où son utilisation pour la fabrication de moules.

Des sculpteurs inspirés

On comprend cependant que la précision presque parfaite du passage d'un modèle numérique calculé par programme à un objet réel qu'on peut saisir dans les mains ait attiré l'attention des amateurs de beautés mathématiques. G. Hart et B. Grossman sont les mathématiciens dont les réalisations sont les plus intéressantes.

Sauf mention contraire, les illustrations sont de George Hart et Bathsheba Grossman

1. Construction collective de George Hart. À l'occasion d'une réunion en l'honneur du mathématicien américain Martin Gardner, à Atlanta en mars 2008, George Hart a organisé l'assemblage d'une œuvre géométrique, *Compass Points*. Le modèle en aluminium est constitué de 60 pièces préalablement découpées au laser (30 d'angles au sommet de 90 degrés, 30 autres d'angles au sommet de 116,5 degrés) et de 510 boulons. Trente composantes sont utilisées lors du montage de la première partie de la sculpture qui, une fois finie, a une forme proche d'un petit dodécaèdre étoilé (polyèdre semblable à celui du cartouche rouge de gauche, qui possède 12 sommets, points de rencontre de 5 pièces, symbolisés par un point rouge). Les 30 autres pièces se rejoignent par trois en des sommets nouveaux au nombre de 20 *(points bleus)* disposés dans l'espace comme les sommets d'un dodécaèdre déformé *(cartouche bleu de droite)*. Chaque nouvelle pièce est vissée en son centre à une pièce de la première catégorie, ce qui donne au tout une bonne rigidité. Le tout est une sorte d'entremêlement entre un dodécaèdre étoilé et un dodécaèdre déformé. Les bras sont reliés par leur partie centrale et on voit la symétrie d'ordre 5 d'un sommet sur la photographie en haut à droite.

G. Hart, qui vit à Stony Brook près de New York, est professeur au Département d'informatique de l'Université de Stony Brook. Son travail en géométrie a reçu de nombreux prix et ses sculptures mathématiques sont exposées dans des endroits prestigieux. Outre ses recherches en géométrie et ses œuvres de sculpteur, il organise dans le monde entier des séances de construction collective de polyèdres géants qu'il imagine le plus souvent. Pour ces séances, il fournit le matériel de base et les explications et en coordonnant l'activité de 10, 20 ou 30 personnes, il aboutit en quelques heures à une sculpture mathématique nouvelle et souvent impressionnante *(voir la figure 1)*.

G. Hart est aussi l'auteur d'un site Internet consacré aux polyèdres : http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html. Son livre écrit avec Henri Picciotto, *Zome Geometry. Hands on Learning With Zome Models* (Key Curriculum Press, 2001), présente un système de construction de polyèdres (le *Zome-system*, http://www.zometool.com/) et décrit son utilisation en même temps qu'il constitue un cours de géométrie. Son usage dans l'enseignement en France serait un excellent moyen de faire aimer les mathématiques.

Depuis plusieurs années, G. Hart utilise les technologies de prototypage rapide pour réaliser des objets dont la plupart seraient impossibles à créer autrement.

La figure 3*a* présente une sculpture qui est la projection dans l'espace à trois dimensions du plus étonnant des polyèdres réguliers de l'espace à quatre dimensions. Ce polyèdre, nommé hyperdodécaèdre, est composé de 120 dodécaèdres identiques, chaque dodécaèdre possédant 12 faces pentagonales. Les dodécaèdres sont liés selon un schéma mathématique d'une régularité parfaite : chacun joue le même rôle vis-à-vis des autres. Bien sûr, projetés dans notre espace à trois dimensions, les 120 dodécaèdres ne sont plus identiques (tout comme les triangles équilatéraux des côtés d'un tétraèdre régulier sont déformés par la perspective d'un dessin en dimension deux) et la symétrie de l'objet de dimension quatre n'apparaît plus qu'imparfaitement. Le résultat est cependant remarquable d'élégance et d'une touchante beauté.

Le fichier informatique nécessaire pour faire ce dessin sur une machine SLS est disponible, mais vous pouvez aussi acheter un exemplaire métallique fabriqué par SLS (voir : http://www.bathsheba.com/math/120cell/). Cette sculpture apparaît dans plusieurs épisodes de la série télévisée de CBS intitulée *Numb3rs* (voir http://www.numb3rs-singularity.fr/).

D'autres formes de l'espace à quatre dimensions projetées dans notre espace sont les sujets des sculptures de G. Hart, dont le « 120-cell tronqué », polyèdre composé de 120 dodécaèdres et de 600 tétraèdres obtenus à partir du polyèdre précédent en opérant en dimension quatre l'équivalent de l'opération qu'on fait en dimension trois par exemple sur un cube en coupant chacun de ses sommets pour faire apparaître huit triangles équilatéraux et six octogones.

Toujours fabriqué par les techniques de prototypage rapide (SLS ou stéréolithographie), G. Hart a pour la première fois créé un polyèdre décrit en 1937 par Mickael Goldberg qui est une sorte de balle dont la surface est composée de 960 hexagones et 12 pentagones (voir : http://www.georgehart.com/rp/rp.html, sixième photo).

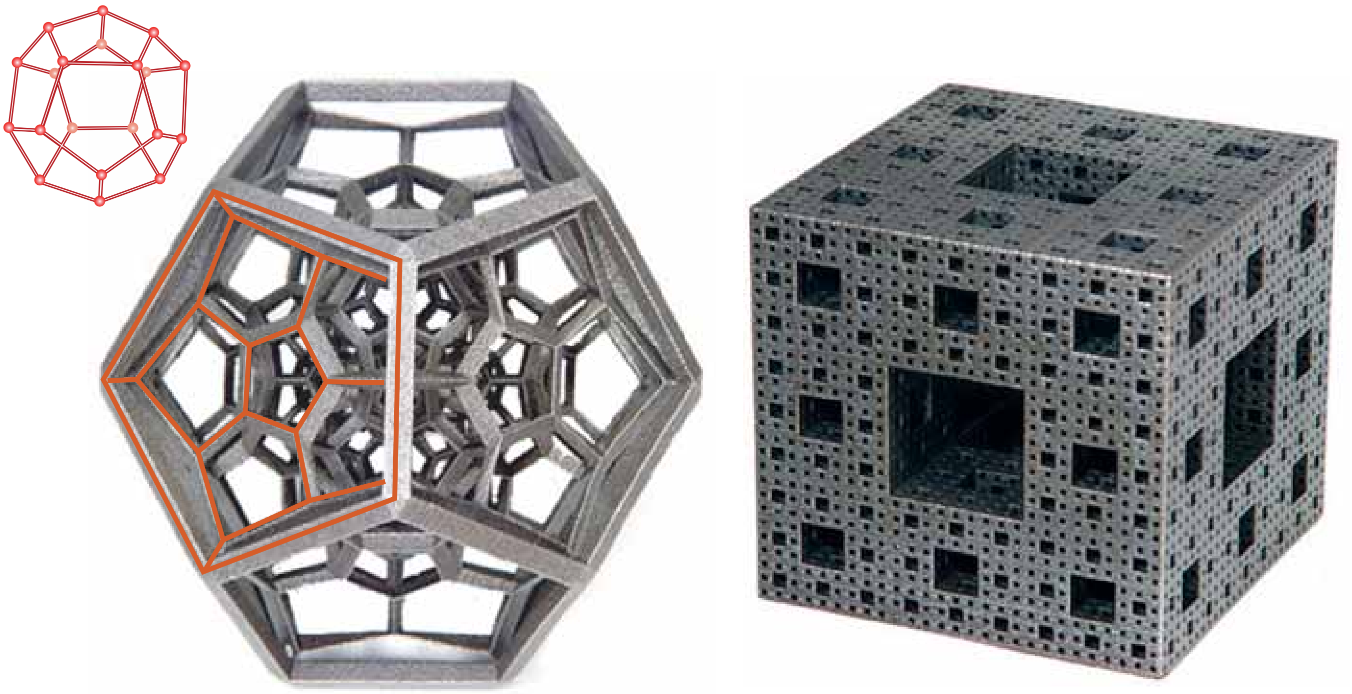
2. George Hart montre le tétraèdre de Sierpinski qu'il a obtenu par prototypage rapide. La formation fractale est évoquée à droite.

Toucher une fractale

Deux sculptures fractales intéressantes ont été programmées et réalisées à l'aide des outils de prototypage rapide par G. Hart : le tétraèdre de Sierpinski et l'éponge de Menger.

Le triangle de Waclaw Sierpinski (1882-1969) est sans doute la figure fractale qu'on rencontre le plus fréquemment dans le monde mathématique et le monde réel : il apparaît sur une des faces du tétraèdre de Sierpinski *(voir la figure 2)*. Cela est dû à sa définition d'une extrême simplicité. On part d'un triangle plein quelconque (s'il est équilatéral, le résultat sera plus joli). On enlève le triangle central déterminé par les segments de droite joignant les milieux des côtés. Cela donne trois triangles sur lesquels on répète la même opération, ce qui donne neuf triangles sur lesquels on recommence encore, etc. La forme a pour dimension fractale $\ln(3)/\ln(2) = 1{,}58496$; ce nombre est situé entre 1 et 2, ce qui signifie que la forme est intermédiaire entre celle d'une courbe et celle d'une surface.

On voit apparaître cette forme dans le tableau des coefficients du binôme de Pascal, lorsqu'on colorie en noir les nombres pairs et en blanc les nombres impairs. On la retrouve aussi dans le graphe des configurations possibles du célèbre casse-tête des tours de Hanoï tant apprécié des informaticiens, car il sert à expliquer les programmes récursifs. On la retrouve encore dans les schémas de 0 et de 1 obtenus par manipulation de l'opérateur logique XOR, dans les dessins que produisent les automates cellulaires, dans les motifs colorés



3. Toucher la quatrième dimension : la sculpture *(à gauche)* de G. Hart réalisée par prototypage rapide est une projection dans notre espace à trois dimensions d'un objet de l'espace à quatre dimensions, l'hyperdodécaèdre, qui est l'équivalent en quatre dimensions du dodécaèdre régulier ; l'hyperdodécaèdre a 120 « faces », des dodécaèdres réguliers *(en cartouche)*, l'un d'eux surligné en rouge. À droite, une forme intermédiaire de l'éponge de Menger, une fractale créée par B. Grossman, aussi par la technique de prototypage rapide.

de certains coquillages, et dans de nombreux autres contextes mathématiques et sans rapports immédiats entre eux (voir http://www.cut-the-knot.org/triangle/Hanoi.shtml et http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle).

Un peu comme le nombre π qui se présente dans une multitude de situations mathématiques indépendantes, le triangle de Sierpinski est partout. Sa version en trois dimensions est dénommée *Tetrix*. Elle s'obtient selon le même principe d'élimination répétée. Cette fois, on commence avec un tétraèdre qu'on vide progressivement en retirant des tétraèdres centraux de plus en plus petits. Sa dimension fractale assez étrangement est 2, la même que celle d'une surface. Cela est dû au fait qu'on peut à chaque étape de la construction prendre tous les petits tétraèdres et les ranger côte à côte sur une face du tétraèdre de départ.

La version réalisée par G. Hart est d'ordre 5, elle est donc composée de $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1\,024$ petits tétraèdres, dont il a fallu déterminer la position pour qu'ils restent attachés : en théorie, deux tétraèdres n'auraient dû avoir qu'un point au plus en commun, ce qui aurait conféré à la sculpture une grande fragilité ! Autre merveille fractale en trois dimensions, l'éponge de Karl Menger *(voir la figure 3b)* est définie selon un principe de même type : on part d'un cube et après l'avoir découpé en 27 cubes identiques plus petits, on retire les 7 cubes qui ne rencontrent aucune arête du cube de départ (il s'agit du cube central et des 6 cubes ayant une face contenant le centre d'une face du cube initial). On recommence alors l'opération sur les cubes restants, obtenant 400 cubes plus petits, puis 8 000, etc. La dimension de l'éponge de Menger est $\ln(20)/\ln(3) = 2{,}7268...$, intermédiaire entre la dimension d'une surface et celle d'un volume.

Cet objet fractal réalisé par G. Hart *(voir la figure 3)* est l'occasion d'un exercice de visualisation mentale délicat. La question posée est : quelle est la forme qu'on voit apparaître si l'on coupe par un plan l'éponge de Menger en deux parties (identiques), le plan passant par le centre de l'éponge et par le milieu de deux arêtes adjacentes du cube initial (ces trois points non alignés déterminent un plan) ? Avant de rechercher la solution de l'énigme visuelle, posez-vous d'abord la même question à propos d'un simple cube *(voir la solution à la fin de l'article).*

L'art des sphères emboîtées

Tout le monde a vu des anneaux de bois enlacés qu'un sculpteur patient a tirés d'un bloc unique. Cet art de la forme difficile à réaliser a été poussé plus loin grâce au prototypage rapide. Un exemple mathématique d'exploit sculptural impossible à réaliser sans cet outil est montré sur la figure 4 : l'emboîtement de sept polyèdres à petites faces sans aucun collage ni aucune soudure (les polyèdres sont d'un seul tenant).

Cette technique de sculpture dans l'abstrait, qui précède la réalisation d'une sculpture en vrai, pourrait s'appeler la *sculpture in silico* (comme on parle de « biologie in silico » à propos de l'analyse des séquences génétiques à l'aide d'outils informatiques). G. Hart pense que cette possibilité deviendra rapidement accessible à tous : « Aujourd'hui il s'agit d'une technologie relativement coûteuse, utilisée principalement pour la conception de produits avancés ou dans les centres de recherche universitaires. Cependant, dans un futur proche, dix ans peut-être, les coûts baisseront et tout le monde pourra créer d'intéressants objets avec ces machines d'impression en trois dimensions. Tout se passera sans doute comme avec les imprimantes-laser, dont les premiers modèles au début des années 1970 valaient plusieurs milliers de dollars, mais que maintenant on trouve dans toutes les écoles et lieu de travail. »

L'autre artiste que nous avons choisi de présenter est Bathsheba Grossman : elle déclare que, bien qu'ayant étudié les mathématiques plus qu'une personne ordinaire, elle ne se prétend pas mathématicienne. Pour elle, l'usage de la technologie, et en particulier des méthodes de prototypage rapide, est une nécessité puisque les autres techniques n'autorisent pas la réalisation des objets qu'elle imagine.

Le travail de Bathsheba Grossman

Elle donne quelques détails sur sa méthode de travail : « Pour réaliser une sculpture, je commence par examiner une forme, parfois une forme familière, comme un cube, parfois une forme moins commune, comme un dodécaèdre rhombique ou autre chose. Utilisant ensuite toutes sortes d'objets, papier, cure-dents, etc., ou simplement par un travail de pure imagination, je tente d'en déterminer les potentialités. Il se produit parfois qu'une forme intéressante m'apparaisse et que je souhaite m'engager dans sa réalisation. Il m'arrive aussi de concevoir des formes abstraites que je n'arrive pas à visualiser correctement. Ce sont peut-être les situations les plus intéressantes, car je crée alors la sculpture pour voir la forme que j'ai définie mentalement sans en avoir une perception globale précise. Une fois le modèle précis fixé, j'utilise des outils de CAO. Ce sera par exemple l'outil *Rhinoceros* qui est un modeleur 3D pour *Windows*, mais je peux utiliser bien d'autres logiciels, pourvu que cela m'aide. Parfois même, je prends ma casquette de programmeur et je développe des utilitaires informatiques pour faire aboutir mon projet. La programmation n'est pas le centre de mon travail, mais un outil commode et je suis heureuse d'en disposer. »

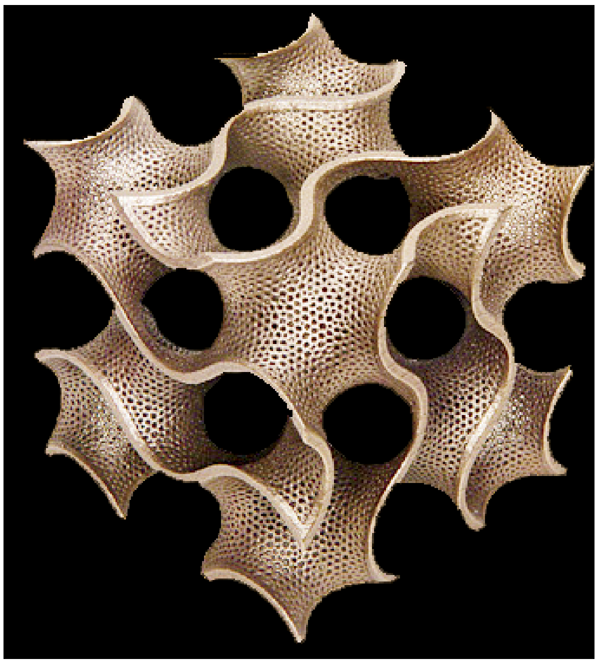
Les sculptures de B. Grossman obtenues par SLS sont de deux catégories. Il y a d'une part celles tirées de modèles purement mathématiques comme des projections de polyèdres de dimension quatre comparables à celles de G. Hart ou certaines surfaces minimales tirées de théories mathématiques avancées. D'autre part, il y a les formes produites par son imagination abstraite selon le processus présenté au-dessus. Ces créations bien que comportant souvent de nombreuses symétries ne sont pas des objets ayant été préalablement envisagés par d'autres mathématiciens, mais bien des œuvres originales. Sans son travail, personne ne les aurait sans doute jamais vues.

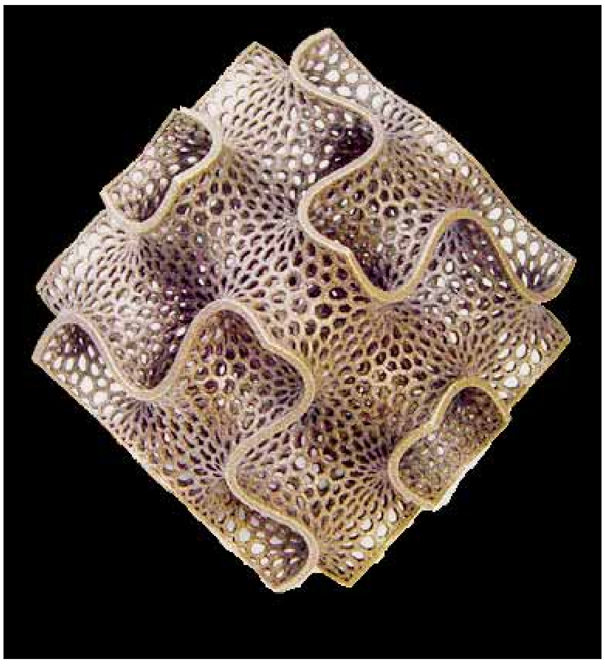
B. Grossman défend l'idée que l'art est destiné à tous. Comme les livres qu'on imprime en milliers d'exemplaires et que chacun peut s'acheter, elle souhaite que les sculptures qu'elle réalise soient aussi abordables que possible et non pas fabriquées en séries limitées vendues à des prix astronomiques. Pour quelques dizaines de dollars (et donc un peu moins d'euros !), chacun peut acquérir ses œuvres en allant visiter son site Internet.

Après avoir gagné sa vie pendant de longues années comme programmeur, professeur de collège ou comme pigiste, en même temps qu'elle poursuivait sa vocation de sculpteur, elle réussit aujourd'hui, en particulier grâce à Internet, à vivre de son art. Elle souhaite que d'autres sculpteurs suivent son exemple et pratiquent à sa manière la sculpture et la diffusion des œuvres dans la direction d'un large public, aidés à chaque étape par les avancées des sciences et de la technologie.

Le laser utilisé par les machines de prototypage rapide que G. Hart et B. Grossman mettent au service de leur imagination sert à cette dernière pour réaliser une catégorie de sculptures mathématiques d'un type totalement différent : le dessin en trois dimensions dans le verre qui est une seconde forme d'impression 3D.

4. Les sept sphères emboîtées fabriquées en prototypage rapide par G. Hart. Les « sphères », d'un seul tenant, tournent indépendamment. Cette sculpture est inspirée d'une tradition aujourd'hui encore active dans certains pays d'Asie *(photo de droite)*. Chaque sphère est faite à partir d'un polyèdre de Goldberg différent (ce sont des polyèdres construits autour de 12 pentagones, décrits en 1937 par Michael Goldberg et dont l'un sert de modèle aujourd'hui à la molécule de C60-Fullerène). Du plus interne vers le plus externe, le nombre de faces des polyèdres est : 252, 272, 282, 312, 362, 372, 392, 432, 482, 492. À la sortie de la machine, les 12 pentagones que comporte chaque sphère sont alignés permettant de voir à travers le centre des 10 sphères. Si on fait bouger les sphères, c'est un petit casse-tête que les aligner à nouveau. Sur les polyèdres de Goldberg voir : http://www.cochem2.tutkie.tut.ac.jp/Fuller/fsl/goldberg.html.





5. Les surfaces minimales. Deux sculptures originales de Bathsheba Grossman méritent l'attention, *Giroid* et *Swchartz' D*. Elles sont faites à partir de surfaces mathématiques minimales. Un pourtour étant fixé, il existe une surface de plus petite aire qui prend appui sur ce pourtour. En fixant certains pourtours particuliers, on obtient des surfaces intéressantes, qui, par exemple, quand on les prolonge périodiquement à l'infini (dans trois directions), séparent tout l'espace en deux domaines complémentaires ayant la même forme. Cette vision fantasmagorique de deux mondes identiques et entremêlés, mais séparés, fait réfléchir !

Un autre usage du laser

L'idée est cette fois d'utiliser un laser pour chauffer un point précis d'un volume de verre transparent, afin de le rendre localement opaque. Ce moyen d'écriture en trois dimensions autorise une nouvelle forme de sculpture, utilisée pour fabriquer toutes sortes de bibelots représentant des animaux, des monuments ou des personnages et a même parfois conduit à la réalisation de portraits en trois dimensions dans de petits blocs transparents.

Bien sûr, cette sculpture laser dans le verre est idéale pour pratiquer l'art mathématique, et c'est précisément l'idée de B. Grossman. Ses œuvres représentent là encore des fractales ou des objets géométriques complexes dont certains du fait qu'ils sont discontinus ne peuvent être réalisés par les méthodes de prototypage rapide. Une nouvelle catégorie d'œuvres sculptées est rendue possible par cette technique, plus aérienne, et totalement libérée des contraintes d'équilibre et de robustesse.

La technique de l'écriture laser dans le verre a permis aussi à B. Grossman de réaliser des sculptures non mathématiques représentant la Voie lactée, une protéine d'insuline, une autre d'hémoglobine, un morceau d'ADN, la molécule de carbone-60, le modèle du Système solaire de Kepler à l'aide de polyèdres emboîtés, etc.

La technologie, en autorisant de nouveaux types de sculptures, donne les moyens aux artistes et particulièrement à ceux qui sont sensibles aux merveilles des mathématiques, de nous faire admirer et tenir en main des objets d'une beauté sans équivalent. L'espoir que bientôt les machines de prototypage rapide et de gravure 3D du verre seront accessibles à tous fait rêver, et les artistes, comme G. Hart et B. Grossman, nous montrent le chemin et rendent visibles à tous ce qu'on a parfois considéré comme des beautés mathématiques réservées aux experts de l'abstrait.

Solution du problème

L'intersection d'un cube avec un plan qui passe par son centre et le milieu de deux arêtes adjacentes est un hexagone régulier. Le même plan dans le cas de l'éponge de Menger donne un tapis hexagonal fractal *(voir la figure à côté du titre de l'article)*, les dentelures des étoiles résultant des carrés évidés *(voir la figure ci-contre)*.

Auteur & Bibliographie

J.-P. Delahaye est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

George Hart, *Rapid Prototyping Web page*, 2008 (on trouvera en particulier des liens vers les fichiers numériques pour réaliser le polyèdre à 120 faces dodécaèdriques, le tétraèdre de Sierpinski et bien d'autres sculptures mathématiques) : http://www.georgehart.com/rp/rp.html

George Hart, *4D Polytope Projection Models by 3D Printing* : http://www.georgehart.com/hyperspace/hart-120-cell.html

G. Hart, *Creating a mathematical museum on your desk*, in *Mathematical Intelligencer*, 27, n° 4, 2005 : www.georgehart.com/MathIntel/Mathematical-Museum.doc

G. Hart, *Solid-segment sculptures*, *Proc. Colloque on Math and Arts*, Maubeuge, France, sept. 2000.

Bathsheba Grossman : le site Internet à partir duquel vous trouverez des informations la concernant et son travail, notamment des animations pour admirer sous tous les angles ses sculptures mathématiques : http ://www.bathsheba.com/
Toutes ses sculptures peuvent être achetées sur son site.